Математические основы алгебры нечётких высказываний

1. Высказыванием называется любое предложение, про которое можно сказать истинно или ложно. Например, «яблоко спелое». Над высказываниями определяются операции – **или/и**, **и**, **не** и т.п. Например, «сегодня снег» и «трамваи не ходят». Результатом операции над высказываниями является высказывание. Такое высказывание называется составным. Предметом математического исследования является истинность или ложность составного высказывания, в зависимости от истинности или ложности входящих в него высказываний. Если высказывания обозначить буквами – высказывательными переменными, то составное высказывание называется формулой алгебры высказываний. Таким образом, в формулу входят переменные, принимающие только два значения, например 0 и 1.

Итак, имеются переменные, принимающие значения 0 и 1 и операции над ними – **или/и** ($\vee -$ дизъюнкция), **и** ($\wedge -$конъюнкция), **не** ($\neg$ - отрицание) и другие. Операции над переменными удовлетворяют некоторым правилам – аксиомам. Например, $\neg 0 = 1$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ и т.п.

Рассмотрим теперь формальную алгебраическую сторону дела. Имеются знаки 0 и 1 и операции над ними, удовлетворяющие некоторым аксиомам. По правилам, составляются формулы, и предметом исследования является значение этой формулы. Множество знаков, операции над ними, аксиомы и правила составления формул образуют алгебраическую структуру. В частности, алгебра высказываний – это булева алгебра.

2. Алгебра B типа (1,2) с сигнатурой ($\neg$, $\to$) и носителем X называется булевой алгеброй, если выполнены следующие аксиомы $\forall a, b, c \in X$ и $\{0,1\} \in X$. Для удобства записи примем обозначение $(\neg a) = \overline{a}$.

1. $\overline{0} = 1$
2. $\overline{\overline{a}} = a$ закон двойного отрицания
3. $a \to a = 1$ закон тождества
4. $\overline{a} \to a = a$
5. $a \to b = \overline{b} \to \overline{a}$ закон контрапозиции
6. $a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$ закон перемены посылок
7. $a \to (b \to c) = (a \to b) \to (a \to c)$
8. $\overline{a \to (\overline{b \to c})} = (a \to b) \to (\overline{a \to \overline{c}})$
9. $((a \to b) \to a) = a$

Заметим несколько простейших равенств, следующих из аксиом (1-7). Над знаком = будем записывать номер аксиомы, из которой это равенство получено.

10. $a\to 1=1$: $a\to 1\overset{3}{=}a\to(a\to a)\overset{7}{=}(a\to a)\to(a\to a)\overset{3}{=}1\to 1\overset{3}{=}1$

11. $0\to a=1$: $0\to a\overset{5,1}{=}\bar a\to 1\overset{10,2}{=}1$

12. $a\to 0=\bar a$: $a\to 0\overset{5}{=}1\to\bar a\overset{3}{=}(a\to a)\to\bar a\overset{2,4}{=}(a\to a)\to(a\to\bar a)\overset{7}{=}$

$$=a\to(a\to\bar a)\overset{2,4}{=}a\to\bar a\overset{2,4}{=}\bar a$$

13. $1\to a=a$: $1\to a\overset{5,1}{=}\bar a\to 0\overset{12,2}{=}a$

14. $a\to(b\to a)=1$: $a\to(b\to a)\overset{6}{=}b\to(a\to a)\overset{3}{=}b\to 1\overset{10}{=}1$

15. $\bar a\to\bar b=(\bar a\to b)\to a$: $\bar a\to\bar b\overset{2}{=}\overline{\overline{\bar a\to\bar b}}\overset{12}{=}\overline{(\bar a\to\bar b)}\to 0\overset{5}{=}$

$=1\to\overline{\left(\overline{\bar a\to\bar b}\right)}\overset{3}{=}\overline{(\bar a\to\bar a)\to\left(\overline{\bar a\to\bar b}\right)}\overset{8}{=}\overline{\overline{\bar a\to\left(\overline{\bar a\to b}\right)}}\overset{2}{=}$

$\overset{2}{=}\bar a\to\left(\overline{\bar a\to b}\right)\overset{5}{=}(\bar a\to b)\to a$

Вместе с операциями ($\neg$, $\to$) принято рассматривать операции $\vee$ и $\wedge$, определяемые следующим образом $a\vee b=\bar a\to b$ и $a\wedge b=\overline{a\to\bar b}$. Рассмотрим свойства операций $\vee$ и $\wedge$ следующие из аксиом (1-7) и теорем (10-15).

16. Идемпотентность $a\vee a=a$, $a\wedge a=a$

Доказательство. $a\vee a=\bar a\to a\overset{4}{=}a$, $a\wedge a=\overline{a\to\bar a}\overset{4}{=}\bar{\bar a}\overset{2}{=}a$

17. Коммутативность $a\vee b=b\vee a$, $a\vee b=b\vee a$

Доказательство. $a\vee b=\bar a\to b\overset{5}{=}\bar b\to a=b\vee a$,

$a\wedge b=\overline{a\to\bar b}\overset{5}{=}\overline{\bar{\bar b}\to\bar a}\overset{2}{=}\overline{b\to\bar a}=b\wedge a$

18. Правила де Моргана $\overline{a\wedge b}=\bar a\vee\bar b$

Доказательство. $\overline{a\wedge b}=\overline{\overline{a\to\bar b}}\overset{5}{=}\overline{\overline{\bar{\bar b}\to\bar a}}\overset{2}{=}\bar{\bar b}\to\bar a=\bar b\vee\bar a\overset{17}{=}\bar a\vee\bar b$

19. Ассоциативность $a\vee(b\vee c)=(a\vee b)\vee c$, $a\wedge(b\wedge c)=(a\wedge b)\wedge c$

Доказательство.

$$a \vee (b \vee c) \overset{17}{=} a \vee (c \vee b) = \overline{a} \to (c \vee b) = \overline{a} \to (\overline{c} \to b) \overset{6}{=}$$

$$\overset{6}{=} \overline{c} \to (\overline{a} \to b) = \overline{c} \to (a \vee b) = c \vee (a \vee b) \overset{17}{=} (a \vee b) \vee c \ .$$

$$a \wedge (b \wedge c) \overset{17}{=} a \wedge (c \wedge b) = \overline{a \to \overline{(c \wedge b)}} = \overline{a \to \overline{\overline{(c \to \overline{b})}}} \overset{2}{=}$$

$$\overset{2}{=} \overline{a \to (c \to \overline{b})} \overset{6,2}{=} \overline{c \to \overline{\overline{(a \to \overline{b})}}} = \overline{c \to \overline{(a \wedge b)}} =$$

$$= c \wedge (a \wedge b) \overset{17}{=} (a \wedge b) \wedge c \ .$$

20. Поглощение: $a \wedge (b \vee a) = a$, $a \vee (b \wedge a) = a$.

Доказательство.

$$a \wedge (b \vee a) = \overline{a \to \overline{(\overline{b} \to a)}} \overset{8}{=} (a \to \overline{b}) \to \overline{(a \to \overline{a})} \overset{4,2}{=} (a \to \overline{b}) \to a \overset{9}{=}$$

$$= a$$

$$a \vee (b \wedge a) = \overline{a} \to \overline{b \to \overline{a}} = \overline{(\overline{a} \to b) \to \overline{(\overline{a} \to a)}} \overset{4}{=} \overline{(\overline{a} \to b) \to \overline{a}} \overset{9}{=}$$

$$= \overline{\overline{a}} \overset{2}{=} a$$

21. Дистрибутивность. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$,

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Доказательство.

$$a \vee (b \wedge c) = \overline{a} \to \overline{(b \to \overline{c})} \overset{8}{=} \overline{(\overline{a} \to b) \to \overline{(\overline{a} \to c)}} = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$a \wedge (b \vee c) = \overline{a \to \overline{(\overline{b} \to c)}} \overset{8}{=} (a \to \overline{b}) \to \overline{(a \to \overline{c})} = \overline{(\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a} \vee \overline{c})} \overset{18}{=}$$

$$= \overline{(\overline{a} \vee \overline{b})} \vee \overline{(\overline{a} \vee \overline{c})} \overset{18}{=} (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

3. Нечёткие высказывания и операции над ними.

Нечётким высказыванием $\widetilde{A}$ называется любое предложение, для которого можно определить степень истинности. Например, «яблоко спелое». Степень истинности $r(\widetilde{A})$ - это числовое значение из отрезка $[0,1]$. Если степень истинности может принимать только значения 0 или 1, то такое нечёткое высказывание является высказыванием, рассматриваемым в алгебре высказываний. В дальнейшем под переменными $x, y, z, \ldots$ будем понимать значения $r(\widetilde{A}), r(\widetilde{B}), \ldots$.

Определение 1. ***Инвертором*** (нечётким отрицанием) называется унарная операция $N(\widetilde{A})$, удовлетворяющая следующим аксиомам

1. $N(N(\widetilde{A})) = \widetilde{A}$
2. $N(0) = 1$
3. Если $r(\widetilde{A}) < r(\widetilde{B})$, то $N(\widetilde{A}) > N(\widetilde{B})$.

Утверждение 1. $N(1) = 0$. Действительно, $0 = N(N(0)) \overset{2}{=} N(1)$.

Существует множество инверторов. Например, $N_S = 1 - r(\widetilde{A})$ - инвертор, называемый стандартным инвертором. Вообще любая функция видов, приведённых на рисунке 1, является инвертором.

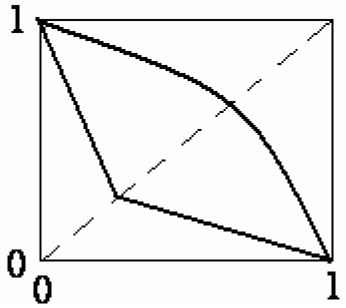


Рис. 1

Определение 2. Бинарная функция T - это $t-$***норма***, если $\forall x, y, z \in [0,1]$ верно, что

1. $T(x, y) = T(y, x)$ - коммутативность
2. $T(T(x, y), z) = T(x, T(y, z))$ - ассоциативность
3. $T(x,0) = 0$ - свойство обнуления
4. $T(x,1) = x$ - нейтральный элемент 1
5. Если $x < y$, то $T(x, z) < T(y, z)$.

Утверждение 2.

1. $T(1, x) = 1$, $T(0, x) = 0$
2. Если $x < y$, то $T(z, x) < T(z, y)$.

Таким образом: Бинарная коммутативная, ассоциативная функция T с нейтральным элементом 1 и нулевым элементом 0, сохраняющая порядок по каждой переменной, называется $t-$нормой.

Примеры:

1. $M(x,y) = \min(x,y)$ - логическое произведение. Заметим, что в алгебре высказываний конъюнкция $x \wedge y = \min(x,y) = M(x,y)$.

2. $W(x,y) = \max(x+y-1,0)$ - $t-$норма Лукасевича или граничное произведение. В алгебре высказываний конъюнкция $x \wedge y = W(x,y)$.

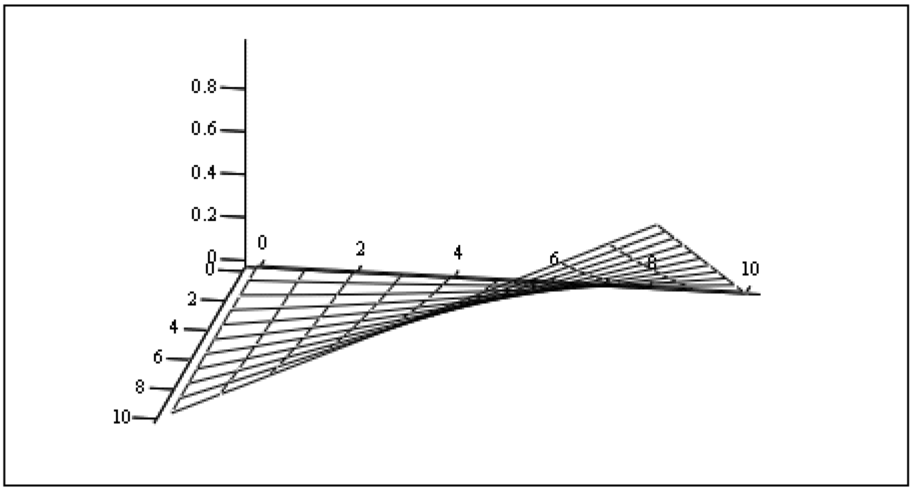
3. $P(x,y) = x \cdot y$ - алгебраическое произведение. В алгебре высказываний $x \wedge y = P(x,y)$.

4. $T_d = \begin{cases} y, & x = 1 \\ x, & y = 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ - драстическое произведение.

В алгебре высказываний $x \wedge y = T_d(x,y)$.

5. $T_s(x,y) = \log_s\left(1 + \dfrac{(s^x - 1)(s^y - 1)}{s-1}\right)$, $0 < s < \infty$ - семейство $t-$норм Франка (Рис.2)

$$s := 3 \qquad i := 0..10 \qquad j := 0..10 \qquad T_{i,j} := \frac{1}{\ln(s)} \cdot \ln\left[1 + \frac{\left(s^{\frac{i}{10}} - 1\right)\left(s^{\frac{j}{10}} - 1\right)}{s - 1}\right]$$

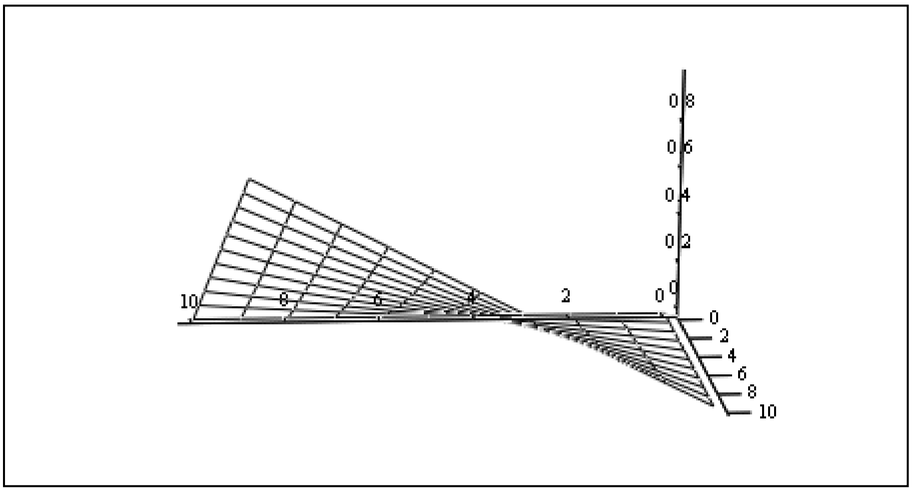


T

Рис. 2

6. $T_\lambda(x,y)=\dfrac{x\cdot y}{\lambda+(1-\lambda)\cdot(x+y-x\cdot y)}$, $1\le\lambda\le 2$ - семейство $t-$норм Хамакера (Рис.3)

$\lambda := 1.4 \quad i := 0..10 \quad j := 0..10 \quad T_{i,j} := \dfrac{\frac{i}{10}\cdot\frac{j}{10}}{\lambda+(1-\lambda)\left(\frac{i}{10}+\frac{j}{10}-\frac{i}{10}\cdot\frac{j}{10}\right)}$



T

Рис. 3

Утверждение 3.

1. $0\le T(x,a)\le a$
2. $T(x,y)\le\min(x,y)$
3. $T(x,y)\ge T_d(x,y)$

Доказательство. 1. $0=T(0,a)\le T(x,a)\le T(1,a)=a$.

2. С учётом 1 имеем $T(x,y)\le x$ & $T(x,y)\le y \Rightarrow T(x,y)\le\min(x,y)$.

3. При $x=1$ $T(1,y)=y=T_d(1,y)$, при $y=1$ аналогично, при $x\ne 0, y\ne 0$ $0=T_d(x,y)\le T(x,y)$. **Утверждение доказано.**

Определение 3. Бинарная функция S - это $t-$***конорма*** **(**$s-$***норма*)**, если $\forall x,y,z\in[0,1]$ верно, что

1. $S(x,y)=S(y,x)$ - коммутативность
2. $S(S(x,y),z)=S(x,S(y,z))$ - ассоциативность
3. $S(x,0)=x$ - нейтральный элемент 0

4. $S(x,1)=1$ - обнуление
5. Если $x<y$, то $S(x,z)<S(y,z)$.

Таким образом: Бинарная коммутативная, ассоциативная функция S с нейтральным элементом 0 и нулевым элементом 1, сохраняющая порядок по каждой переменной, называется $t-$конормой ($s-норма$).

Примеры:
1. $S(x,y)=\max(x,y)$ - логическая сумма. В алгебре высказываний $x\vee y=S(x,y)$.
2. $A(x,y)=x+y-x\cdot y$ - алгебраическая сумма. В алгебре высказываний $x\vee y=A(x,y)$.
3. $G(x,y)=\min(x+y,1)$ - граничная сумма. В алгебре высказываний $x\vee y=G(x,y)$.
4. $S_d=\begin{cases} y, & x=0 \\ x, & y=0 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$ - драстическая сумма.

В алгебре высказываний $x\vee y=S_d(x,y)$.

Определение 4. ***Импликатором*** I называется бинарная функция, для которой верно, что $\forall x,y\in[0,1]$
1. $I(1,y)=y$,
2. $I(0,y)=1$,
3. $I(x,1)=1$,
4. Если $x<y$, то $I(x,z)>I(y,z)$.
5. Если $x<y$, то $I(z,x)<I(z,y)$.
6. $I(x,y)=I(N(y),N(x))$, где $N-$ инвертор.
7. $I(x,I(y,z))=I(y,I(x,z))$

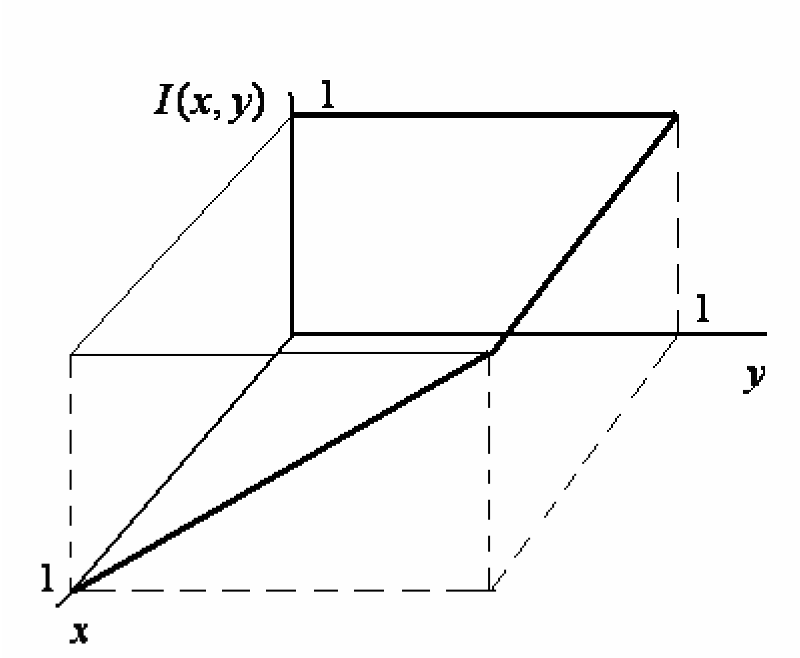


Рис. 4. Граничные значения импликатора

Пример: 1. $I(x,y) = \max(1-x, y)$. В качестве инвертора возьмём стандартный инвертор $N(x) = 1 - x$.

Проверим п.6.

$$I(N(y), N(x)) = \max(1 - N(y), N(x)) = \max(1-(1-y), 1-x) = $$
$$= \max(y, 1-x) = \max(1-x, y)$$

Проверим п.7.

$$I(x, I(y,z)) = \max(1-x, I(y,z)) = \max(1-x, \max(1-y, z)) =$$
$$= \max(1-x, 1-y, z)$$

$$I(y, I(x,z)) = \max(1-y, I(x,z)) = \max(1-y, \max(1-x, z)) =$$
$$= \max(1-y, 1-x, z)$$

2. $I(x,y) = 1 - x + x \cdot y$. В качестве инвертора возьмём стандартный инвертор $N(x) = 1 - x$. Проверим п.6.

$$I(N(y), N(x)) = 1 - N(y) + N(x) \cdot N(y) = 1 - (1-y) + (1-y)(1-x) =$$
$$= 1 - 1 + y + 1 - x - y + x \cdot y = 1 - x + x \cdot y$$

Проверим п.7

$$I(x, I(y,z)) = 1 - x + x \cdot I(y,z) = 1 - x + x \cdot (1 - y + yz) = 1 - x \cdot y + xyz$$
$$I(y, I(x,z)) = 1 - y + y \cdot I(x,z) = 1 - y + y \cdot (1 - x + xz) = 1 - y \cdot x + yxz$$

3. $I(x,y) = \min(1 - x + y, 1)$. В качестве инвертора возьмём стандартный инвертор $N(x) = 1 - x$.

Проверим п.6.

$$I(N(y),N(x)) = \min(1-N(y)+N(x),1) = \min(1-(1-y)+1-x,1) =$$
$$= \min(y+1-x,1) = \min(1-x+y,1)$$

Проверим п.7

$$I(x,I(y,z)) = \min(1-x+I(y,z),1) = \min(1-x+\min(1-y+z,1),1)$$
$$I(y,I(x,z)) = \min(1-y+I(x,z),1) = \min(1-y+\min(1-x+z,1),1)$$

I) $1-x<1-y$, $1-y+z<1$, значит $1-x+z<1$

$$I(x,I(y,z)) = \min(1-x+1-y+z,1)$$
$$I(y,I(x,z)) = \min(1-y+1-x+z,1)$$

II) $1-x<1-y$, $1-y+z>1$,

$$I(x,I(y,z)) = \min(2-x,1) = 1$$

IIa) $1-x+z>1$ $I(y,I(x,z)) = \min(2-y,1) = 1$

IIb) $1-x+z<1$ $I(y,I(x,z)) = \min(\underbrace{(1-y+z)}_{>1}+\underbrace{(1-x)}_{>0},1),1) = 1$

III) $1-x>1-y$, $1-y+z>1$, значит $1-x+z>1$

$$I(x,I(y,z)) = \min(2-x,1) = 1$$
$$I(y,I(x,z)) = \min(2-y,1) = 1$$

IV) $1-x>1-y$, $1-y+z<1$

IVa) $1-x+z>1$

$$I(x,I(y,z)) = \min(1-x+1-y+z,1) = 1$$
$$I(y,I(x,z)) = \min(2-y,1) = 1$$

IVb) $1-x+z<1$

$$I(x,I(y,z)) = \min(1-x+1-y+z,1)$$
$$I(y,I(x,z)) = \min(1-y+1-x+z,1).$$

Ссылки на пункт i определения n будем обозначать $\overset{i(n)}{=}$. Аналогично, будем обозначать ссылки на теоремы.

Теорема 1. $S(x,y) = I(N(x),y) - s -$норма.

Доказательство. 1) Коммутативность: $S(x,y) = I(N(x),y) \overset{6(4)}{=}$

$$= I(N(y),N(N(x))) \overset{1(1)}{=} I(N(y),x).$$

2) Ассоциативность: $S(x,S(y,z)) \overset{1(T1)}{=} S(x,S(z,y)) =$

$= I[N(x), I(N(z), y)] \overset{7(4)}{=} I(N(z), I(N(x), y)) = I(N(z), S(x, y)) =$

$= S(z, S(x, y)) \overset{1(T1)}{=} S(S(x, y), z)$

3) $S(x,0) = I(N(x),0) \overset{6(4)}{=} I(N(0), x) = I(1, x) = x$ - нейтральный элемент 0

4) $S(x,1) = I(N(x),1) \overset{6(4)}{=} I(0, x) = 1$.

5) Если $x < y$, то по 1(3) $N(x) > N(y)$ и по 4(4) $I(N(x), z) < I(N(y), z)$, то есть, выполнена аксиома 5 определения s – нормы. **Теорема доказана.**

Теорема 2. $T(x, y) = N(I(x, N(y)) -$ t – норма.

Доказательство. 1) Коммутативность: $T(x, y) = N(I(x, N(y)) \overset{6(4)}{=}$

$= N(I(N(N(y)), N(x)) \overset{1(1)}{=} N(I(y, N(x)) = T(y, x)$.

2. Ассоциативность: $T(x, T(y, z)) = N(I(x, N(T(y, z))) \overset{1(T2)}{=}$

$N(I(x, N(T(z, y))) = N(I(x, N(N(I(z, N(y))))) \overset{1(1)}{=}$

$= N(I(x, I(z, N(y)))) \overset{7(4)}{=} N(I(z, I(x, N(y)))) = N(I(z, N(T(x, y))) =$

$= T(z, T(x, y)) \overset{1(T2)}{=} T(T(x, y), z)$.

3. $T(x,0) = N(I(x, N(0)) \overset{2(1)}{=} N(I(x,1)) \overset{3(4)}{=} N(1) = 0$

4. $T(x,1) = N(I(x, N(1)) = N(I(x,0)) = N(I(N(0), N(x) =$

$= N(I(1, N(x)) \overset{1(4)}{=} N(N(x)) = x$.

5. Если $x < y$, то по 4(4) $I(x, N(z)) > I(y, N(z))$. Значит по 3(1) $N(I(x, N(z))) < N(I(y, N(z)))$. То есть, выполнена аксиома 5 определения t – нормы. **Теорема доказана.**

Теорема 3. Если t – норма определена равенством $T(x, y) = N(I(x, N(y))$, а s – норма – равенством $S(x, y) = I(N(x), y))$, то справедливы равенства (законы де Моргана)

а) $N(T(x, y)) = S(N(x), N(y))$,

б) $N(S(x, y)) = T(N(x), N(y))$.

Доказательство. а) $N(T(x,y)) = N(N(I(x,N(y)))) \overset{1(1)}{=}$
$= I(x,N(y)) \overset{1(1)}{=} I(N(N(x)),N(y)) = S(N(x),N(y))$.

б) $N(S(x,y)) = N(I(N(x),y))) \overset{6(4)}{=} N(I(N(y),N(N(x)))) \overset{1(1)}{=}$
$= T(N(y),N(x)) \overset{1(T2)}{=} T(N(x),N(y))$. **Теорема доказана.**